

حل اختبار رقم ٧ مقرر ١٣١ ر

زمن الاختبار: ١٥ دقيقة

الحل:

يمكن وضع الدالة علي الصورة

$$f(x) = (1-x)^{-3} \sin^{-1} x + x^3$$

وباختيار

$$u(x) = (1-x)^{-3} \quad ; \quad v(x) = \sin^{-1} x$$

ويكون :

$$u(x) = (1-x)^{-3}, u^{(1)}(x) = 3(1-x)^{-4}, \\ u^{(2)} = 12(1-x)^{-5} \quad ; \quad u^{(3)} = 60(1-x)^{-6}$$

أيضا

$$v(x) = \sin^{-1} x, v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \\ v^{(2)} = x(1-x^2)^{-3/2} \quad ; \quad v^{(3)} = 3x^2(1-x^2)^{-5/2} + (1-x^2)^{-3/2}$$

ولكن من قاعدة ليبنتز

$$f^{(3)}(x) = (uv)^{(3)} = uv^{(3)} + \binom{3}{1} u^{(1)} v^{(2)} + \binom{3}{2} u^{(2)} v^{(1)} + u^{(3)} v \\ = uv^{(3)} + 3u^{(1)} v^{(2)} + 3u^{(2)} v^{(1)} + u^{(3)} v$$

بالتعويض مع ملاحظة أن

$$(x^3)^{(3)} = 3! = 6$$

ف نجد أن

$$\begin{aligned}
 f^{(3)}(x) &= uv^{(3)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + u^{(3)}v \\
 &= (1-x)^{-3} \left[3x^2(1-x^2)^{-5/2} + (1-x^2)^{-3/2} \right] \\
 &\quad + 3 \left(3(1-x)^{-4} \right) \left(x(1-x^2)^{-3/2} \right) \\
 &\quad + 3 \left(12(1-x)^{-5} \right) (1-x^2)^{-1/2} \\
 &\quad + \left(60(1-x)^{-6} \right) \sin^{-1} x + 6 \\
 &= (1-x)^{-3} \left[3x^2(1-x^2)^{-5/2} + (1-x^2)^{-3/2} \right] \\
 &\quad + 9x(1-x)^{-4}(1-x^2)^{-3/2} \\
 &\quad + 36(1-x)^{-5}(1-x^2)^{-1/2} \\
 &\quad + 60(1-x)^{-6} \sin^{-1} x + 6
 \end{aligned}$$

أيضا نجد أن

$$f'(x) = 3(1-x)^{-4} \sin^{-1} x + \frac{(1-x)^{-3}}{\sqrt{1-x^2}} + 3x^2$$

ومنها

$$f'(0) = 3(1-0)^{-4} \sin^{-1} 0 + \frac{(1-0)^{-3}}{\sqrt{1-0^2}} + 0 = 0 + 1 = 1$$

كلية العلوم – جامعة القاهرة – قسم الرياضيات

الفرقة الأولى – المجموعة السابعة

اختبار رقم ٧ مقرر ر ١٣١

زمن الاختبار: ١٥ دقيقة

رقم الكود:

الإسم :

استخدم قاعدة ليبنتز لإيجاد المشتقة الثالثة للدالة

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x} + (2x + 1)^2$$

ثم احسب $f'(-1)$.

الحل :

كما في المسألة السابقة